Varianta 64

Subiectul I.

a) $x+2y+3z-4=0$.

b) $3x+8y-5=0$

c) Aria căutată este $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

d) De exemplu, numerele complexe $1, -1, i, -i$ au modulul egal cu 1.

e) $(\cos\pi + i\cdot\sin\pi)^{2007}=-1$

f) $\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$.

Subiectul II.

1.

a) $n=5$.

b) $D=(-\infty, 0]\cup[1, \infty)$.

c) Soluțiile sunt tripletele $(1, 2, 4)$, $(2, 2, 2)$ şi $(4, 2, 1)$.

d) Câtul împărțirii lui f la g este $q=X^2-X+2$, iar restul este $r=-1$.

e) $T_3=24$.

2.

a) $f''(x)=2007\cdot 2006\cdot x^{2005}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

b) Funcția f are două puncte de extrem.

c) Funcția f are un singur punct de inflexiune.

d) $\int_0^1 f''(x)\,dx=2007$.

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2007}}\int_0^n f'(x)\,dx=1$.

Subiectul III.

a) Evident.

b) Se demonstrează prin calcul direct.

c) Se demonstrează prin calcul direct.

d) Evident, deoarece $M\cdot N=N\cdot M$.

e) Se calculează efectiv $\det(M+i\cdot N)=u+i\cdot v$, cu $u, v\in\mathbf{R}$ şi se arată că $\det(M-i\cdot N)=u-i\cdot v$, de unde rezultă concluzia.

f) Dacă $\det(M^2+N^2)=0$, din punctele **d)** şi **e)** rezultă

$\det(M + i\cdot N) = \det(M - i\cdot N) = 0$ şi folosind apoi punctele **c)** şi **a)** rezultă concluzia.

g) Avem: $\det(M^2 + I_2) = \det(M^2 + I_2^2) = 0 \overset{\text{f)}}{\Leftrightarrow} \det(M) = \det(I_2) = 1$.

Din punctul **b)** obținem

$0 = \det(M^2 + I_2) = \det(tr(M)\cdot M) \overset{\text{a)}}{=} (tr(M))^2 \cdot \det(M) = (tr(M))^2$, deci $tr(M) = 0$.

Înlocuind în relația (1) obținem $M^2 + I_2 = 0_2$.

Subiectul IV.

a) $g_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

b) Aplicând teorema Leibniz-Newton, obținem: $g_n(x) = F_n(\arcsin x) - F_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

c) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, funcția g_n este derivabilă pe $(-1, 1)$ şi derivând relația de la **b)** obținem: $g_n'(x) = \frac{\ln(1 + x^n)}{\sqrt{1 - x^2}}$.

d) Avem: $\forall\, x \in (0, 1)$, $g_n'(x) > 0$. Atunci, pentru $n \in \mathbf{N}^*$, funcția g_n este strict monotonă pe $(-1, 1)$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in (-1, 1)$, $g_n'(x) > 0$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in (-1, 1)$, $\ln(1 + x^n) > 0$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in (-1, 1)$, $x^n > 0$ $\Leftrightarrow$ n este un număr par.

e) Se arată prin calcul direct.

f) $$\left|\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} g_n(x)\,dx\right| \overset{\text{e)}}{=} \left|\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\cdot\ln(1 + x^n)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx\right| \le \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left|\frac{x\cdot\ln(1 + x^n)}{\sqrt{1 - x^2}}\right| dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\cdot\ln(1 + x^n)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

Obținem: $$0 < \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\cdot\ln(1 + x^n)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx < \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln(1 + x^n)\,dx,$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\cdot\ln(1 + x^n)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = 0$ şi folosind (1) rezultă concluzia.

g) Aplicând regula lui l'Hospital şi punctul **c)**, deducem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\ln(1 + x^{n+1})}{\ln(1 + x^n)}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$